TUGAS AKHIR - SM141501

MENENTUKAN HARGA DOWN AND OUT CALL OPTION MENGGUNAKAN TRANSFORMASI FOURIER

ALMAS NUR SHODRINA PUTRI
NRP 1212 100 020

Dosen Pembimbing:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Sentot Didik S., M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

FINAL PROJECT - SM141501

DOWN AND OUT CALL OPTION PRICING USING FOURIER TRANSFORM

ALMAS NUR SHODRINA PUTRI
NRP 1212 100 020

Supervisors:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Sentot Didik S., M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

MENENTUKAN HARGA DOWN AND OUT CALL OPTION MENGGUNAKAN TRANSFORMASI FOURIER

DOWN AND OUT CALL OPTION PRICING USING FOURIER TRANSFORM

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Pemodelan dan Simulasi Sistem
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
ALMAS NUR SHODRINA PUTRI
NRP. 1212 100 020

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si	Endah Rokhmati M.P., Ph.D
NIP. 19600527 198701 1 001	NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash,S.Si, M.T
NIP. 19700831 199403 1 003

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN MATEMATIKA

Surabaya, Januari 2016

MENENTUKAN HARGA DOWN AND OUT CALL OPTION MENGGUNAKAN TRANSFORMASI FOURIER

Nama Mahasiswa	:	Almas Nur Shodrina Putri
NRP	:	1212 100 020
Jurusan	:	Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	:	1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D
		2. Drs. Sentot Didik S., M.Si

Abstrak

Derivatives merupakan instrument keuangan dimana nilainya diturunkan dari underlying asset yang mendasarinya. Option merupakan salah satu jenis dari derivatives. Barrier option dibagi menjadi 4, yaitu down and in, down and out, up and in, dan up and out. Dalam tugas akhir ini, dibahas mengenai bagaimana menentukan harga dari down and out call option, yang merupakan salah satu tipe dari barrier option, menggunakan transformasi Fourier. Langkah-langkah yang dilakukan yang pertama adalah menyederhanakan persamaan awal menggunakan variabel baru, mengecek syarat batas, yang kedua dilakukan transformasi Fourier, kemudian langkah ketiga dilakukan invers transformasi Fourier, substitusi syarat awal, lalu diperoleh solusi untuk down and out call option. Setelah memperoleh solusi dari down and out call option dengan transformasi Fourier, dilakukan simulasi menggunakan software matlab.

Kata-kunci: *Transformasi Fourier, Persamaan Black-Scholes, Barrier Option, Down and Out Call Option*

DOWN AND OUT CALL OPTION PRICING USING FOURIER TRANSFORM

Name	:	Almas Nur Shodrina Putri
NRP	:	1212 100 020
Department	:	Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors	:	1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D
		2. Drs. Sentot Didik S., M.Si

Abstract

Derivatives are financial instruments where the value is derived from underlying assets. Option is one type of derivatives. Barrier option is divided into four, there are down and in, down and out, up and in, and up and out. In this thesis, we discussed about how to determine the price of a down and out call option, which is one type of barrier option, using Fourier transformation. The steps taken are, simplify the initial equation using the new variable, check the boundary conditions, Fourier transformation, performed the inverse Fourier transform, the substitution of the initial conditions, and then we will obtain a solution for down and out call option. After obtaining a solution of a down and out call option, carried out simulations using matlab software.

Key-words: *Fourier Transform, Black-Scholes Equation, Barrier Option, Down and Out Call Option*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayahNya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"MENENTUKAN HARGA DOWN AND OUT CALL OPTION MENGGUNAKAN TRANSFORMASI FOURIER"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penyusunan Tugas Akhir ini telah dibantu oleh banyak pihak, maka dari itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Endah Rokhmati M.P., Ph.D selaku dosen pembimbing Kerja Praktek yang secara sabar telah memberikan banyak bimbingan, arahan, dan saran sejak penyusunan proposal hingga penyusunan Tugas Akhir.

2. Drs. Sentot Didik S., M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

3. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Ketua Jurusan Matematika ITS

4. Bapak Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si, Bapak Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si, M.Si dan Ibu Dra. Sri Suprapti H., M.Si selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tugas Akhir ini.

5. Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp. selaku koordinator Program Study S1.

6. Bapak Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.

7. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis juga menyadari bahwa dalam Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Januari 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

Daftar Simbol

S	:	Stock price.
E	:	Strike price.
r	:	Risk free rate.
B	:	Barrier.
t	:	Waktu.
$H(x,T)$	:	Heat equation.
σ	:	volatilitas.

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat dari Tugas Akhir.

1.1 Latar Belakang

Keuangan merupakan salah satu sektor yang berkembang dengan cepat. Bersamaan dengan kemajuan dari produk-produk di bidang keuangan modern, terjadi adanya dorongan untuk mengembangkan model matematika yang baru dan metode matematika modern [1]. *Derivatives* adalah *instrument* keuangan dimana nilainya diturunkan dari *underlying asset* yang mendasarinya. *Underlying asset* yang dimaksud dapat berupa saham, indeks saham, obligasi, dan lain-lain. *Derivatives* mempunyai banyak jenis. *option* dan *futures* merupakan dua jenis *derivatives* yang utama. Selain *option* dan *futures*, ada jenis *derivatives* lain yang sering diperdagangkan yaitu *swaps* [2]. *Option* sudah ada sejak lama, tetapi *option* pertama kali diperdagangkan di The Chicago Board Option Exchange (CBOE) pada 26 April 1973. Pada saat itu, The Chicago Board Option Exchange (CBOE) yang pertama kali menentukan standar dalam *option* [3].

Option merupakan perjanjian secara tertulis antara dua pihak, yaitu pihak *holder* (pembeli) dan *writer* (penjual), dimana *holder* diberi hak oleh *writer* untuk membeli atau menjual sejumlah aset dengan harga tertentu (*strike price/exercise price*) dan pada waktu tertentu (*expiration date*) sesuai dengan perjanjian yang telah disepakati antara dua pihak. Berdasarkan hak yang diberikan, *option* dibagi menjadi dua tipe yaitu *call option* dan *put option*. Sedangkan berdasarkan waktu *exercise*, *option* dibagi menjadi dua tipe yaitu *European option* dan *American option* [1].

Pada awal tahun 1970, Fischer Black, Myron Scholes, dan Robert Merton mengembangkan suatu model untuk menentukan harga pada *stock option*. Model tersebut dinamakan model Black-Scholes (atau model Black-Scholes-Merton). Model Black-Scholes mempunyai pengaruh yang sangat besar. Persamaan diferensial Black-Scholes adalah persamaan yang memenuhi harga dari *derivative* yang bergantung pada pembayaran saham non-dividend [5].

Persamaan diferensial Black-Scholes akan digunakan sebagai persamaan awal, lalu disederhanakan menggunakan variabel-variabel baru. Kemudian setelah mendapatkan persamaan baru, dilakukan transformasi Fourier dan dicari invers Fourier dari persamaan baru yang telah ditransformasi. Setelah itu, dilakukan penyederhanaan bentuk persamaan menjadi c.d.f distribusi normal dan dikembalikan lagi ke variabel awal, maka diperoleh solusi analitik untuk *down and out call option*. Dalam Tugas Akhir ini, dibahas mengenai bagaimana menentukan harga *down and out call option*, yang merupakan salah satu tipe *barrier option*, dengan menggunakan metode transformasi Fourier.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah:

1. Bagaimana menentukan harga *down and out call option* dari persamaan diferensial Black-Scholes menggunakan transformasi Fourier.

2. Bagaimana analisis dari hasil simulasi harga *down and out call option*.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan pada pengerjaan Tugas Akhir ini adalah:

1. *Down and out call option* bertipe Eropa.
2. *Underlying asset* yang dimaksud adalah saham.
3. Volatilitas harga saham adalah konstan.
4. Suku bunga bank bebas resiko, konstan, dan masih berlaku sepanjang periode *option*.

1.4 Tujuan

Tujuan yang dicapai dari penulisan Tugas Akhir ini adalah:

1. Menentukan harga *down and out call option* menggunakan transformasi Fourier.
2. Mengetahui hasil simulasi harga *down and out call option*.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diperoleh dalam pengerjaan Tugas Akhir ini adalah:

1. Adanya suatu metode untuk menentukan harga *down and out call option* dengan menggunakan transformasi Fourier.
2. Mengetahui harga dari *down and out call option*.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN
   Bab ini berisi mengenai gambaran umum yaitu latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Bab ini berisi tentang beberapa penelitian terdahulu dan teori-teori yang digunakan dalam penelitian yaitu *option*, jenis-jenis *option*, istilah-istilah dalam *option*, kegunaan *option*, faktor-faktor yang mempengaruhi harga *option*, persamaan diferensial Black-Scholes, *barrier option*, transformasi Fourier, dan distribusi normal.

3. BAB III METODE PENELITIAN
   Dalam bab ini dijelaskan mengenai tahapan-tahapan yang dilakukan. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, kemudian dilakukan analisis masalah dan simulasi hasil menggunakan *software* matlab, dan tahap terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan pada tahap sebelumnya.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Bab IV membahas mengenai pengerjaan dalam memperoleh solusi *down and out call option* secara detail menggunakan metode transformasi Fourier dan disajikan simulasi dari hasil solusi *down and out call option* menggunakan *software* matlab.

5. BAB V PENUTUP
   Bab ini berisi mengenai kesimpulan akhir dari hasil yang diperoleh dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab ini dijelaskan mengenai penelitian terdahulu dan teori-teori yang terkait dengan tugas akhir yaitu *option*, persamaan diferensial parsial Black-Scholes, *barrier option*, syarat batas *down and out call*, transformasi Fourier, dan distribusi normal.

2.1 Penelitian Terdahulu

Termotivasi dari masalah manajemen resiko pada *barrier option*, terdapat sebuah penelitian yang mengusulkan modifikasi yang fleksibel dari model *barrier option* dan memperkenalkan *step option* [11]. Kemudian pada tahun 2002, sebuah penelitian menunjukkan bagaimana beberapa *barrier option* yang kompleks dapat dibatasi menggunakan portofolio dari *European option* yang standar [12]. Pada tahun 1998, ada sekelompok peneliti menulis sebuah paper tentang mengembangkan batas statis untuk beberapa *exotic option* menggunakan *option* yang standar. Metode tersebut bergantung pada hubungan antara *European put* dan *call* dengan *strike price* yang berbeda [10]. Disajikan sejumlah hasil teoritis baru untuk replikasi dari *barrier option* melalui portofolio statis dari *European put* dan *call option* [13]. Pada tahun 1993, terdapat penelitian tentang pendekatan secara efisien untuk *down and out call option* dalam model Binomial [9]. Rohmah, telah mengkaji solusi analitik *European option* menggunakan metode transformasi Fourier [14].

2.2 *Option*

Option merupakan perjanjian secara tertulis antara dua pihak, yaitu pihak *holder* (pembeli) dan *writer* (penjual), dimana *holder* diberi hak oleh *writer* untuk membeli atau menjual sejumlah aset dengan harga tertentu (*strike price/exercise price*) dan pada waktu tertentu (*expiration date*) sesuai dengan perjanjian yang telah disepakati antara dua pihak [1].

2.2.1 Jenis-Jenis *Option*

Berdasarkan hak yang diberikan, *option* dibagi menjadi 2 yaitu:

1. *Call option* adalah hak untuk membeli sejumlah aset dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu.

2. *Put option* adalah hak untuk menjual sejumlah aset dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu.

Berdasarkan waktunya, *exercise, option* dibagi menjadi 2 yaitu [1]:

1. *European option* merupakan *option* yang hanya dapat di*exercise* ketika *expiration date*

2. *American option* merupakan *option* yang dapat di*exercise* kapan saja selama periode *option* masih berlangsung.

2.2.2 Istilah-Istilah Dalam *Option*

Berikut ini adalah beberapa istilah dalam *option* [1]:

1. *Strike price* atau *exercise price* adalah harga beli atau harga jual yang telah disepakati antara dua pihak, *holder* dan *writer*, ketika *option* di*exercise*.

2. *Expiration date* adalah tanggal jatuh tempo yang telah telah disepakati antara dua pihak, *holder* dan *writer*, untuk melakukan *exercise* pada *option*. Jika sudah melewati *expiration date*, maka *option* sudah tidak bisa digunakan.

3. *Underlying asset* adalah aset mendasar pada *option* yang diperdagangkan.

2.2.3 Kegunaan *Option*

Option mempunyai dua kegunaan utama yaitu untuk menspekulasi dan membatasi. Investor yang percaya bahwa saham tertentu akan naik dapat membeli beberapa saham pada perusahaan tersebut. Jika investor tersebut benar, maka investor tersebut akan mendapatkan uang yang berarti investor tersebut mendapat keuntungan. Tetapi jika investor tersebut salah, maka investor tersebut akan kehilangan uang atau mengalami kerugian. Di samping itu, jika investor berpikir bahwa saham akan turun, maka investor tersebut dapat menjual saham atau membeli *put option*.

2.2.4 Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Harga *Option*

Harga option dipengaruhi oleh beberapa faktor, yaitu [7]:

1. Harga saham yang dijadikan patokan.

2. *Strike price* yang sudah ditetapkan.

3. *Expiration date* dari *option*.

4. Volatilitas harga saham yang diharapkan selama periode *option*.

5. Tingkat suku bunga jangka pendek selama periode *option*.

6. Dividen.

2.3 Persamaan Diferensial Black-Scholes

Persamaan diferensial Black-Scholes yang akan diselesaikan untuk mendapatkan solusi analitik *down and out call option* dengan metode transformasi Fourier adalah [3]:

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + (r-n)S\frac{\partial f}{\partial S} - \frac{\partial f}{\partial \tau} - rf. \qquad (2.1)$$

dimana,

f	:	nilai *call option*
t	:	waktu
σ	:	volatilitas dari *underlying asset*
S	:	*stock price*
n	:	dividen
r	:	*risk free rate.*

2.4 *Barrier Option*

Nilai *barrier option* bergantung pada harga *underlying asset* sepanjang periode *option*. Tidak seperti *option* yang lain, *payoff* dari *barrier option* tidak hanya bergantung pada harga akhir dari *underlying asset*, tetapi juga bergantung pada batas *barrier*, apakah selama periode *option* harga *underlying asset* tersebut mencapai batas *barrier* atau tidak. Pada umumnya, *barrier option* dibagi menjadi dua yaitu *knock-out option* dan *knock-in option*. Jika harga saham mencapai nilai *barrier*, maka *knock-in barrier option* akan bernilai positif. Jika harga saham tidak mencapai nilai *barrier*, maka *knock-out barrier option* akan bernilai positif. Pada *barrier option* bertipe *up*, nilai *barrier* lebih tinggi dari harga saham S ada saat t=0. Sedangkan pada *barrier option* bertipe *down*, nilai *barrier* lebih rendah daripada harga saham S pada saat t=0. Secara keseluruhan, *barrier option* dibagi menjadi 4 jenis yaitu [3]:

1. *Down and out*: nilai *barrier* lebih kecil dari harga saham S pada saat t=0. Jika selama masa berlaku *option* harga mencapai nilai *barrier*, maka tidak dapat di*exercise*. Syarat batas untuk *down and out call option* adalah [6]:

$$f(S,T) = max\{S-K,0\} \text{ jika } S > B$$
$$f(S,t) = 0 \text{ untuk } t < T \text{ dan } S \leq B$$

2. *Down and in*: nilai *barrier* lebih kecil dari harga saham S pada saat t=0. Jika selama masa berlaku *option* harga mencapai nilai *barrier*, maka dapat di*exercise*.

3. *Up and out*: nilai *barrier* lebih besar dari harga saham S pada saat t=0. Jika selama masa berlaku *option* harga mencapai nilai *barrier*, maka tidak dapat di*exercise*.

4. *Up and in*: nilai *barrier* lebih besar dari harga saham S pada saat t=0. Jika selama masa berlaku *option* harga mencapai nilai *barrier*, maka dapat di*exercise*.

2.5 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier didefinisikan sebagai berikut [2]:

$$\mathcal{F}g(\cdot,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi x) g(x,t) dx \equiv f(\xi,t) \qquad (2.2)$$

Untuk $\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(\xi,t) \mid d\xi < \infty$, invers dari transformasi Fourier didefinisikan sebagai berikut:

$$g(x,t) = \mathcal{F}^{-1} f(\xi,t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi x) f(\xi,t) d\xi. \qquad (2.3)$$

Berikut ini adalah beberapa sifat dari transformasi Fourier:

1. $\mathcal{F}(bg(\cdot,t)+ch(\cdot,t)) = b\mathcal{F}g(\cdot,t)+c\mathcal{F}h(\cdot,t)$, dimana b dan c adalah konstanta

2. $\mathcal{F}g'(\cdot,t) = -i\xi f(\xi,t)$ jika $\lim_{|x|\to\infty} g(x,t) = 0$

3. $\mathcal{F}g''(\cdot,t) = -\xi^2 f(\xi,t)$ jika $\lim_{|x|\to\infty} g'(x,t) = 0$

Sifat konvolusi dari transformasi Fourier yaitu [3]:

$$\mathcal{F}(g(\cdot,t) * h(\cdot,\tau)) = \mathcal{F}g(\cdot,\tau)\cdot\mathcal{F}h(\cdot,\tau) \tag{2.4}$$

dimana $(g * h)(\omega,\tau) \equiv \int g(\omega,\tau)\cdot g(s-\omega,\tau)\cdot d\omega$ merepresentasikan konvolusi dari 2 fungsi real g dan h.

Berikut ini merupakan salah satu penerapan transformasi Fourier:
Rangkaian RC dengan R=1kohm, C=1uF mempunyai respon impuls h(t)=exp$^{-1000t}\,u(t)$. Transformasi Fourier dari h(t) adalah H(jw) = $\frac{1}{jw+1000}$. Jika diberi masukan x(t)= exp^{j2t}, yaitu sinyal sinusoidal dengan frekuensi w=2, maka keluarannya adalah y(t)=exp^{j2t}H(j2)=$\frac{\exp^{j2t}}{j2+1000}$

2.6 Distribusi Normal

Distribusi normal adalah suatu distribusi dengan variabel acak adalah kontinu. Distribuusi normal mempunyai beberapa sifat umum yaitu [8]:

1. Grafiknya selalu ada di atas sumbu datar x.

2. Bentuknya simetrik terhadap $x = \mu$

Variabel acak x akan berdistribusi normal dengan parameter rata-rata μ dan varians σ^2, jika fungsinya berbentuk

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2). \tag{2.5}$$

Jika variabel acak x berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu = 0$ dan varians $\sigma^2 = 1$, maka disebut distribusi normal baku, dengan fungsinya berbentuk

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{1}{2}z^2); -\infty < z < +\infty. \tag{2.6}$$

BAB III
METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir terdiri atas tiga tahap yaitu studi literatur, analisis masalah dan simulasi terhadap hasil persamaan akhir yang diperoleh, dan penarikan kesimpulan.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap studi literatur, dilakukan identifikasi permasalahan dan mempelajari teori-teori pendukung yang berhubungan dengan Tugas Akhir yaitu *option*, *barrier option*, persamaan diferensial Black-Scholes, transformasi Fourier, dan distribusi normal.

3.2 Analisis Masalah

Pada tahap ini dilakukan analisis masalah yaitu dengan menyelesaikan model persamaan diferensial Black-Scholes untuk *down and out call option*, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menyederhanakan persamaan diferensial Black-Scholes dengan menggunakan variabel baru dan diperoleh persamaan baru.

2. Setelah mendapatkan persamaan baru pada tahap sebelumnya, lalu dilakukan transformasi Fourier. Tetapi perlu diperhatikan syarat batas dari *down and out call* apakah memenuhi untuk dilakukan transformasi Fourier atau tidak, jika tidak memenuhi maka akan dilakukan manipulasi supaya transformasi Fourier dapat dilakukan

tetap dengan suatu fungsi yang terintegral. Kemudian setelah dilakukan transformasi Fourier.

3. Menghitung invers dari transformasi Fourier yang telah terbentuk pada tahap sebelumnya.

4. Menyederhanakan bentuk persamaan yang telah diperoleh dari invers transformasi Fourier, kemudian dikembalikan ke variabel awal dan diperoleh solusi analitik untuk *down and out call*.

Selanjutnya disajikan simulasi dari solusi *down and out call option* yang telah diperoleh.

3.3 Penarikan Kesimpulan

Tahap terakhir dari pengerjaan Tugas Akhir ini adalah penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan pada tahap sebelumnya.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai penyelesaian persamaan diferensial Black-Scholes untuk mendapatkan solusi analitik *down and out call option*. Pembahasan dimulai dengan menyederhanakan persamaan awal Black-Scholes menggunakan variabel baru, lalu dilakukan transformasi Fourier dan invers Fourier, kemudian dilakukan penyederhanaan bentuk persamaan menjadi c.d.f distribusi normal dan dikembalikan lagi ke variabel awal. Pada akhir pembahasan dilakukan simulasi.

Langkah 1

Pada tahap ini dilakukan penyederhanaan terhadap persamaan Black-Scholes dengan merubah variabel sehingga didapatkan persamaan baru. Persamaan diferensial persamaan Black-Scholes yang diselesaikan untuk mendapatkan solusi analitik *down and out call option* adalah Persamaan (2.1). Diberikan variabel non-dimensional sebagai berikut:

$$x = ln\left(\frac{S}{B}\right) \tag{4.1}$$

$$S = B\exp(x) \tag{4.2}$$

$$T = \sigma^2\tau \tag{4.3}$$

dimana,

$$\begin{array}{rcl} B & : & barrier \\ T & : & maturity\ date. \end{array}$$

Dilakukan penurunan secara parsial, maka:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}\{\frac{\partial f}{\partial S}\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S}\}\frac{\partial x}{\partial S} \\ &= \{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S}\}\frac{\partial x}{\partial S} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\{\frac{\partial x}{\partial S}\}^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{1}{S^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{1}{S^2}\right) \\ &= \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{S^2}\frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \sigma^2\frac{\partial f}{\partial T}. \tag{4.6}$$

Sehingga Persamaan (4.1) menjadi:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{S^2}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + (r-n)S\left(\frac{1}{S}\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \\ &\quad \left(\sigma^2\frac{\partial f}{\partial T}\right) - rf \\ 0 &= \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(r - n - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \sigma^2\frac{\partial f}{\partial T} - rf. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Langkah 2

Pada tahap ini, dilakukan transformasi Fourier terhadap persamaan diferensial Black-Scholes yang telah diperoleh pada tahap sebelumnya. Namun perlu diperhatikan syarat batas dari *down and out call option*, apakah memenuhi untuk dilakukan transformasi Fourier atau tidak. Jika tidak memenuhi, maka dilakukan manipulasi supaya bisa dilakukan transformasi Fourier. Kemudian, setelah dilakukan transformasi Fourier, persamaan yang telah didapatkan dibawa ke dalam bentuk c.d.f distribusi normal.

Pertama

Dilakukan pengecekan terhadap syarat batas dengan memperhatikan syarat batas *down and out call option* sebagai berikut:

$$max\{S-E,0\} \leq f(S,\tau) \leq S. \tag{4.8}$$

Substitusi Persamaan (4.2), maka syarat batas menjadi:

$$max\{B\exp(x)-E,0\} \leq f(S,\tau) \leq B\exp(x). \tag{4.9}$$

Pengecekan syarat batas untuk $x \to -\infty$ dan untuk $x \to +\infty$ adalah sebagai berikut:
Untuk $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} max\{B\exp(x)-E,0\} \leq \lim_{x\to-\infty} f(S,\tau) \leq \lim_{x\to-\infty} B\exp(x)$$

$$max\{B\exp(-\infty)-E,0\} \leq \lim_{x\to-\infty} f(S,\tau) \leq B\exp(-\infty)$$

$$0 \leq \lim_{x\to-\infty} f(S,\tau) \leq 0$$

Untuk $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} max\{B\exp(x) - E, 0\} \leq \lim_{x\to+\infty} f(S,\tau) \leq \lim_{x\to+\infty} B\exp(x)$$

$$max\{B\exp(+\infty) - E, 0\} \leq \lim_{x\to+\infty} f(S,\tau) \leq B\exp(+\infty)$$

$$+\infty \leq \lim_{x\to+\infty} f(S,\tau) \leq +\infty$$

Terlihat bahwa syarat batas dari $f(S,\tau)$ belum memenuhi syarat untuk dilakukan transformasi Fourier. Sehingga, Persamaan (4.7) direduksi ke dalam *heat equation* dengan mengubah variabel menjadi $f(S,\tau) = H(x,T)E\exp\{-\alpha x - \gamma\tau\}$ dan dilakukan penurunan kembali dengan langkah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(HE\exp(-\alpha x - \gamma\frac{T}{\sigma^2})\right)\\
&= -\alpha HE\exp(-\alpha x - \gamma\frac{T}{\sigma^2}) + E\exp(-\alpha x - \gamma\frac{T}{\sigma^2})\frac{\partial H}{\partial x}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(-\alpha HE\exp(-\alpha x - \gamma\frac{T}{\sigma^2}) + E\exp(-\alpha x - \gamma\frac{T}{\sigma^2})\\
&\quad \frac{\partial H}{\partial x})\\
&= \alpha^2 HE\exp(-\alpha x - \gamma\frac{T}{\sigma^2}) - \alpha E\exp(-\alpha x - \gamma\frac{T}{\sigma^2})\frac{\partial H}{\partial x} -\\
&\quad \alpha E\exp(-\alpha x - \gamma\frac{T}{\sigma^2})\frac{\partial H}{\partial x} + E\exp(-\alpha x - \gamma\frac{T}{\sigma^2})\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\\
&= \alpha^2 HE\exp(-\alpha x - \gamma\frac{T}{\sigma^2}) - 2\alpha E\exp(-\alpha x - \gamma\frac{T}{\sigma^2})\\
&\quad \frac{\partial H}{\partial x} + E\exp(-\alpha x - \gamma\frac{T}{\sigma^2})\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T}\left(HE\exp(-\alpha x-\gamma\frac{T}{\sigma^2})\right)\\
&= -\frac{\gamma}{\sigma^2}HE\exp(-\alpha x-\gamma\frac{T}{\sigma^2})+E\exp(-\alpha x-\gamma\frac{T}{\sigma^2})\frac{\partial H}{\partial T}
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

Persamaan (4.9), (4.10), dan (4.11) disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.7), sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\left(r-n-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial f}{\partial x}-\sigma^2\frac{\partial f}{\partial T}-rf\\
&= \frac{1}{2}\sigma^2(\alpha^2 HE\exp(-\alpha x-\gamma\frac{T}{\sigma^2})-2\alpha E\exp(-\alpha x-\gamma\frac{T}{\sigma^2})\\
&\quad \frac{\partial H}{\partial x}+E\exp(-\alpha x-\gamma\frac{T}{\sigma^2})\frac{\partial^2 H}{\partial x^2})+\left(r-n-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\\
&\quad (-\alpha HE\exp(-\alpha x-\gamma\frac{T}{\sigma^2})+E\exp(-\alpha x-\gamma\frac{T}{\sigma^2})\frac{\partial H}{\partial x})-\\
&\quad \sigma^2(-\frac{\gamma}{\sigma^2}HE\exp(-\alpha x-\gamma\frac{T}{\sigma^2})+E\exp(-\alpha x-\gamma\frac{T}{\sigma^2})\\
&\quad \frac{\partial H}{\partial T})-r(HE\exp(-\alpha x-\gamma\tau))\\
&= \frac{1}{2}\sigma^2(\alpha^2 H-2\alpha\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial^2 H}{\partial x^2})+\left(r-n-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\\
&\quad (-\alpha H+\frac{\partial H}{\partial x})-\sigma^2(-\frac{\gamma}{\sigma^2}H+\frac{\partial H}{\partial T})-r(H)\\
&= \frac{\sigma^2\alpha^2 H}{2}-\sigma^2\alpha\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\sigma^2\alpha\frac{\partial H}{\partial x}-\sigma^2\alpha^2 H-\\
&\quad rH+\gamma H-\sigma^2\frac{\partial H}{\partial T}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + (\sigma^2\alpha - \sigma^2\alpha)\frac{\partial H}{\partial x} - \sigma^2\frac{\partial H}{\partial T} + \\
&\quad \left(\frac{\sigma^2\alpha^2}{2} - \sigma^2\alpha^2 - rT\gamma\right) H \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial H}{\partial T} + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha^2 - \frac{r}{\sigma^2} + \frac{\gamma}{\sigma^2}\right) H. \quad (4.12)
\end{aligned}
$$

Langkah selanjutnya yang dilakukan untuk mendapatkan persamaan difusi adalah dengan mencari nilai γ dan α, dengan diketahui bahwa:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= r + \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} \\
\frac{d\gamma}{d\alpha} &= \sigma^2\alpha \\
0 &= \sigma^2\alpha
\end{aligned}
$$

Nilai σ^2 tidak boleh 0, maka $\alpha = 0$ sehingga berakibat $\gamma = r$ Nilai α dan γ dimasukkan ke dalam Persamaan (4.12), maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 0 \\
\gamma &= r.
\end{aligned}
$$

$$
0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial H}{\partial T}. \quad (4.13)
$$

Dilakukan pengecekan syarat batas kembali terhadap persamaan difusi yang telah diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
H(0,T) &= 0 \quad (4.14) \\
H(x,0) &= \exp(\alpha x) max\{b\exp(x) - 1, 0\} \quad (4.15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&max\{B\exp(x) - E, 0\} \leq H(x,T)E\exp(-ax - \gamma\tau) \leq \\
&B\exp(x). \quad (4.16)
\end{aligned}
$$

Pengecekan syarat batas untuk $x \to -\infty$ dan untuk $x \to +\infty$ adalah sebagai berikut:

Untuk $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} max\{B\exp(x) - E, 0\} \leq \lim_{x\to-\infty} H(x,T)$$
$$E\exp(-ax - \gamma\tau) \leq \lim_{x\to-\infty} B\exp(x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(ax+\gamma\tau)}{E} max\{B\exp(x) - E, 0\} \leq$$
$$\lim_{x\to-\infty} H(x,T) \leq \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(ax+\gamma\tau)}{E} B\exp(x)$$

$$\frac{\exp\{a(-\infty)+\gamma\tau\}}{E} max\{B\exp(-\infty) - E, 0\} \leq$$
$$\lim_{x\to-\infty} H(x,T) \leq \frac{\exp(a(-\infty)+\gamma\tau)}{E} B\exp(-\infty)$$

$$0 \leq \lim_{x\to-\infty} H(x,T) \leq 0$$

Untuk $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} max\{B\exp(x) - E, 0\} \leq \lim_{x\to+\infty} H(x,T)$$
$$E\exp(-ax - \gamma\tau) \leq \lim_{x\to+\infty} B\exp(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(ax+\gamma\tau)}{E} max\{B\exp(x) - E, 0\} \leq$$
$$\lim_{x\to+\infty} H(x,T) \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(ax+\gamma\tau)}{E} B\exp(x)$$

$$\frac{\exp(a(+\infty)+\gamma\tau)}{E} max\{B\exp(+\infty) - E, 0\} \leq$$
$$\lim_{x\to+\infty} H(x,T) \leq \frac{\exp(a(+\infty)+\gamma\tau)}{E} B\exp(+\infty)$$

$$+\infty \leq \lim_{x\to+\infty} H(x,T) \leq +\infty$$

Syarat batas dari $H(x,T)$ merupakan syarat batas dengan kondisi semi *infinite*, yaitu kondisi dimana sebagian syarat batas memenuhi untuk dilakukan transformasi Fourier sedangkan sebagian syarat batas yang lain tidak memenuhi, sehingga dilakukan pendekatan syarat batas dengan $H_0(x)$ diketahui sebagai berikut:

$$H_0(x) = \begin{cases} \exp(ax)max\{0, b\exp(x)-1\} & x > 0 \\ -\exp(-ax)max\{0, b\exp(-x)-1\} & x < 0 \end{cases}$$

Dilakukan pengecekan kembali terhadap syarat batas yang baru:

$$-\exp(-ax)max\{0, b\exp(-x)-1\} \leq H(x,T) \leq \exp(ax)max\{0, b\exp(x)-1\}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\exp(-ax)max\{0, b\exp(-x)-1\} \leq \lim_{x\to+\infty} H(x,T) \leq \lim_{x\to+\infty} \exp\{ax\}max\{0, b\exp(x)-1\}$$

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} H(x,T) \leq +\infty$$

Syarat batas dari *down and out call option* telah memenuhi sifat dari transformasi Fourier, maka dapat dilakukan transformasi Fourier terhadap persamaan diferensial parsial Black-Scholes yang telah didapatkan pada tahap sebelumnya.

Kedua

Dilakukan transformasi Fourier terhadap Persamaan (4.13):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{0\} &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right\} - \mathcal{F}\left\{\frac{\partial H}{\partial T}\right\} \\
0 &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right\} - \mathcal{F}\left\{\frac{\partial H}{\partial T}\right\}. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dilakukan transformasi fourier pada bagian ruas kanan dari Persamaan (4.17):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\frac{\partial H(x,T)}{\partial t}\right\} &= \frac{d}{dt}\mathcal{F}H(x,T) \\
&= \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i f x) H(x,T)dx \\
&= \frac{d}{dt}\xi(f,T) \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 H(x,T)}{\partial x^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i f x)\frac{\partial^2 H(x,T)}{\partial x^2}dx. \qquad (4.19)$$

Dilakukan pemisalan untuk memudahkan perhitungan:

$$\begin{aligned}
u &= \exp(-2\pi i f x) \\
du &= -2\pi i f \exp(-2\pi i f x)dx \\
dv &= \frac{\partial^2 H(x,T)}{\partial x^2} \\
v &= \frac{\partial H(x,T)}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Kemudian, Persamaan (4.19) diselesaikan dengan menggunakan pemisalan tersebut:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 H(x,T)}{\partial x^2}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\exp(-2\pi i f x)\frac{\partial H(x,T)}{\partial x} \mid_{-\infty}^{+\infty} - \\ &\int_{-\infty}^{+\infty}(-2\pi i f)\exp(-2\pi i f x)\frac{\partial H(x,T)}{\partial x}dx]\end{aligned}$$

Pada tahap pengecekan syarat batas, telah dibuktikan bahwa $\lim H(x,T) = 0$, maka:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 H(x,T)}{\partial x^2}\right\} = (2\pi i f)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2\pi i f x)\frac{\partial H(x,T)}{\partial x}dx.$$

Dilakukan pemisalan untuk memudahkan perhitungan:

$$\begin{aligned} u &= \exp(-2\pi i f x) \\ du &= -2\pi i f \exp(-2\pi i f x)dx \\ dv &= \frac{\partial H(x,T)}{\partial x} \\ v &= H(x,T). \end{aligned}$$

Degan pemisalan tersebut, perhitungan persamaan (4.20) menjadi:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 H(x,T)}{\partial x^2}\right\} &= (2\pi i f)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\exp(-2\pi i f x)H(x,T)\mid_{-\infty}^{+\infty} - \\
&\int_{-\infty}^{+\infty}(-2\pi i f)\exp(-2\pi i f x)H(x,T)dx] \\
&= (2\pi i f)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}((2\pi i f)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2\pi i f x) \\
&H(x,T)dx) \\
&= (2\pi i f)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2\pi i f x)H(x,T)dx \\
&= -4\pi^2 f^2 \xi(f,T). \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, hasil transformasi Fourier yaitu (4.18) dan (4.20) disubtitusikan ke persamaan (4.17) diperoleh :

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right\} - \mathcal{F}\left\{\frac{\partial H}{\partial T}\right\} \\
&= \frac{1}{2}(-4\pi^2 f^2 \xi(f,T)) - \frac{d}{dt}\xi(f,T) \\
\frac{d}{dt}\xi(f,T) &= \frac{1}{2}(-4\pi^2 f^2 \xi(f,T)) \\
\frac{d}{dt}\xi(f,T) &= -2\pi^2 f^2 \xi(f,T). \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Persamaan (4.21) merupakan persamaan diferensial biasa yang dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\xi(f,T) &= -2\pi^2 f^2 \xi(f,T) \\
\frac{d\xi(f,T)}{dt} &= -2\pi^2 f^2 \xi(f,T) \\
\frac{1}{\xi(f,T)}d\xi(f,T) &= (-2\pi^2 f^2)dt \\
\int_0^T \frac{1}{\xi(f,T)}d\xi(f,T) &= \int_0^T (-2\pi^2 f^2)dt \\
\ln \xi(f,T)\mid_0^T &= -2\pi^2 f^2 T \\
\frac{\xi(f,T)}{\xi(f,0)} &= \exp(-2\pi^2 f^2 T) \\
\xi(f,T) &= \xi(f,0)\exp(-2\pi^2 f^2 T). \quad (4.22)
\end{aligned}
$$

Terlihat bahwa $\exp(-2\pi^2 f^2 T)$ merupakan bentuk dari distribusi normal dengan mean = 0. $\xi(f,T)$ merupakan transformaasi Fourier dari $H(x,T)$ dan $\xi(f,0)$ merupakan transformaasi Fourier dari $H(x,0)$. Sehingga persamaan (4.22) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathcal{F}H(x,T) = \mathcal{F}H(x,0)\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{(x-0)^2}{2T}\right)\right). \quad (4.23)$$

Langkah 3

Pada tahap ini, dilakukan invers pada persamaan (4.23) yang merupakan hasil dari transformasi Fourier.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}H(x,T) &= \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}H(x,0)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{(x-0)^2}{2T}\right)\right) \\
\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}H(x,T) &= \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}H(x,0)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right)\right) \\
H(x,t) &= H(x,0)\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right). \quad (4.24)
\end{aligned}
$$

Dimisalkan $b(x,T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right)$, sehingga persamaan (4.24) menjadi:

$$H(x,T) = H(x,0)b(x,T). \tag{4.25}$$

Menurut sifat konvolusi, Persamaan (4.25) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} H(x,T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x,0)b(x-s,T)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(s)\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{2T}\right) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(s) \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{2T}\right) ds \end{aligned} \tag{4.26}$$

Langkah 4

Pada tahap ini, persamaan yang telah diperoleh sebelumnya disederhanakan, kemudian dikembalikan ke variabel awal, maka diperoleh solusi untuk *down and out call option.*

$$H(x,T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(s) \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{2T}\right) ds. \tag{4.27}$$

Kemudian, dilakukan perubahan variabel sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{x-s}{\sqrt{2T}} &= -z \\ s &= x + z\sqrt{2T} \\ ds &= dz\sqrt{2T}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Sehingga diperoleh:

$$H(x,T) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_0(x+z\sqrt{2T}) \exp(-z^2) dz \tag{4.29}$$

$$H(x,T) = A + B. \tag{4.30}$$

Untuk A

$$\begin{aligned}
H_0(s) &= \exp(as)max\{0, b\exp(s)-1\} \\
&= \exp(a(x+z\sqrt{2T})) \\
&\quad max\{0, b\exp(x+z\sqrt{2T})-1\} &(4.31)\\
H_0(s) &\geq 0 \\
z &\geq \frac{-\ln b - x}{\sqrt{2T}} &(4.32)\\
z &= \frac{-\ln b - x}{\sqrt{2T}}. &(4.33)
\end{aligned}$$

Maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty} b\exp(a+1)(x+z\sqrt{2T})\exp(-z^2)dz - \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty} \exp(a)(x+z\sqrt{2T})\exp(-z^2)dz \\
&= I_1 - I_2 \\
I_1 &= \frac{b\exp(a+1)x}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty} \exp(a+1)(z\sqrt{2T}-z^2)dz \\
&= \frac{b\exp(a+1)x + \frac{1}{2}(a+1)^2T}{\sqrt{\pi}} \\
&\quad \int_z^{+\infty} \exp(-(z-\frac{1}{2}(a+1)\sqrt{2T})^2)dz \\
y &= z - \frac{(a+1)}{2}\sqrt{2T} \\
&= \frac{-\ln b - x}{\sqrt{2T}} - \frac{(a+1)}{2}\sqrt{2T} \\
dy &= dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}b\exp((a+1)x+\frac{1}{2}(a+1)^2T) \\
&\quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{h_1}^{+\infty}\exp(-y^2)dy \\
&= \frac{1}{2}b\exp((a+1)x+\frac{1}{2}(a+1)^2T)erfc(h_1) \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

dimana,

$$
\begin{aligned}
h_1 &= -\left[\frac{\ln b + x}{\sqrt{2T}} + \frac{(a+1)}{2}\sqrt{2T}\right] \qquad (4.35) \\
erfc(h_1) &= \int_{h_1}^{+\infty}\exp(-y^2)dy. \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

Menggunakan cara yang sama dengan I_1, maka dapat diperoleh I_2 sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z}^{+\infty} b\exp(a)(x+z\sqrt{2T})\exp(-z^2)dz \qquad (4.37) \\
&= \frac{1}{2}\exp(ax+\frac{1}{2}a^2T)erfc(h_2) \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

dimana,

$$
\begin{aligned}
h_2 &= -\left[\frac{\ln b + x}{\sqrt{2T}} + \frac{a}{2}\sqrt{2T}\right] \qquad (4.39) \\
erfc(h_2) &= \int_{h_2}^{+\infty}\exp(-y^2)dy. \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

Persamaan (4.34) dan (4.37) disubstitusikan ke dalam A, sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}b\exp((a+1)x+\frac{1}{2}(a+1)^2T)erfc(h_1) - \\
&\quad \frac{1}{2}\exp(ax+\frac{1}{2}a^2T)erfc(h_2). \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

Untuk B

Nilai B dapat diperoleh dengan cara yang sama yang dilakukan untuk menghitung nilai A, dengan mengganti x dengan x' dan perlu diingat bahwa $x' = -x$.

$$
\begin{aligned}
H_0(s) &= \exp(as) max\{0, b\exp(s) - 1\} \\
&= \exp(a(x' + z\sqrt{2T})) \\
&\quad max\{0, b\exp(x' + z\sqrt{2T}) - 1\} && (4.42) \\
H_0(s) &\geq 0 \\
z &= \frac{-\ln b - x'}{\sqrt{2T}} && (4.43) \\
z &= \frac{-\ln b - x'}{\sqrt{2T}}. && (4.44)
\end{aligned}
$$

Maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} b\exp(a+1)(x' + z\sqrt{2T})\exp(-z^2)dz - \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} b\exp(a)(x' + z\sqrt{2T})\exp(-z^2)dz \\
&= I_3 - I_4 \\
I_3 &= \frac{b\exp(a+1)x'}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} \exp(a+1)(z\sqrt{2T} - z^2)dz \\
&= \frac{b\exp(a+1)x' + \frac{1}{2}(a+1)^2T}{\sqrt{\pi}} \\
&\quad \int_z^{+\infty} \exp(-(z - \frac{1}{2}(a+1)\sqrt{2T})^2)dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= z - \frac{(a+1)}{2}\sqrt{2T} \\
&= \frac{\ln b - x'}{\sqrt{2T}} - \frac{(a+1)}{2}\sqrt{2T} \\
dy &= dz \\
I_3 &= \frac{1}{2} b \exp((a+1)x' + \frac{1}{2}(a+1)^2 T) \\
& \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{h_1}^{+\infty} \exp(-y^2) dy \\
&= \frac{1}{2} b \exp((a+1)x' + \frac{1}{2}(a+1)^2 T) erfc(h_3) \quad (4.45)
\end{aligned}
$$

dimana,

$$
\begin{aligned}
h_3 &= -\left[\frac{\ln b + x'}{\sqrt{2T}} + \frac{(a+1)}{2}\sqrt{2T}\right] \quad (4.46) \\
erfc(h_3) &= \int_{h_3}^{+\infty} \exp(-y^2) dy. \quad (4.47)
\end{aligned}
$$

Menggunakan cara yang sama dengan I_3, maka dapat diperoleh I_4 sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z}^{+\infty} b \exp(a)(x' + z\sqrt{2T}) \exp(-z^2) dz \quad (4.48) \\
&= \frac{1}{2} \exp(ax' + \frac{1}{2}a^2 T) erfc(h_4) \quad (4.49)
\end{aligned}
$$

dimana,

$$
\begin{aligned}
h_4 &= -\left[\frac{\ln b + x'}{\sqrt{2T}} + \frac{a}{2}\sqrt{2T}\right] \quad (4.50) \\
erfc(h_4) &= \int_{h_4}^{+\infty} \exp(-y^2) dy. \quad (4.51)
\end{aligned}
$$

Persamaan (4.45) dan (4.48) disubstitusikan ke dalam B, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}b\exp((a+1)x' + \frac{1}{2}(a+1)^2T)erfc(h_3) - \\ & \frac{1}{2}\exp(ax' + \frac{1}{2}a^2T)erfc(h_4). \end{aligned} \tag{4.52}$$

Kemudian, persamaan yang telah diperoleh dikembalikan ke variabel awal, maka diperoleh solusi untuk *down and out call option.*

$$\begin{aligned} f(S,\tau;E) &= EH(x,T)\exp(-ax - y\tau) \\ &= E[A+B]\exp(-ax - y\tau) \\ &= EA\exp(-ax - y\tau) + EB\exp(-ax - y\tau) \\ &= C + D. \end{aligned} \tag{4.53}$$

C dan D dikembalikan ke dalam variabel awal, maka diperoleh:

$$C = \frac{[Serfc(h_1) - E\exp(-r\tau)erfc(h_2)]}{2} \tag{4.54}$$

$$D = -\left(\frac{S}{B}\right)^{-\delta} \frac{\left[Berfc(h_3) - \left(\frac{S}{B}\right)E\exp(-r\tau)erfc(h_4)\right]}{2} \tag{4.55}$$

$f(S,\tau;E)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(S,\tau;E) = \frac{[S.erfc(h_1) - E\exp\{-r\tau\}erfc(h_2)]}{2} - \\ \left(\frac{S}{B}\right)^{-\delta} \frac{\left[B.erfc(h_3) - \left(\frac{S}{B}\right)E\exp(-r\tau)erfc(h_4)\right]}{2}. \end{aligned} \tag{4.56}$$

4.1 Simulasi

Sebagai simulasi model penentuan harga *down and out call option*, maka diberikan contoh kontrak dengan dividen dan tanpa dividen.

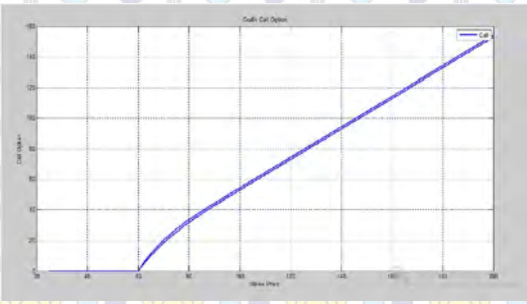
4.1.1 Tanpa Pembayaran Dividen

Pengaruh Suku Bunga

Diasumsikan E = \$50, $\tau = 1$, $r_1 = 6\%$, $r_2 = 9\%$, $\sigma = 0.2$ $\delta = 0$, Bd = 60. Dengan harga saham diasumsikan pada tabel berikut dan berdasarkan persamaan (5.1) diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut :

Tabel 4.1: Harga Call Option dengan $r_1 = 6\%$ dan $r_2 = 9\%$

No.	$S_t(\$)$	$r_1 = 6\%$	$r_2 = 9\%$
1.	70	18.5687	20.2990
2.	80	31.6551	33.2945
3.	90	42.5912	44.0731
4.	100	52.8372	54.2547
5.	110	62.8955	64.2936
6.	120	72.9084	74.3015



Gambar 4.1: Call option dengan $r_1 = 6\%$ dan $r_2 = 9\%$

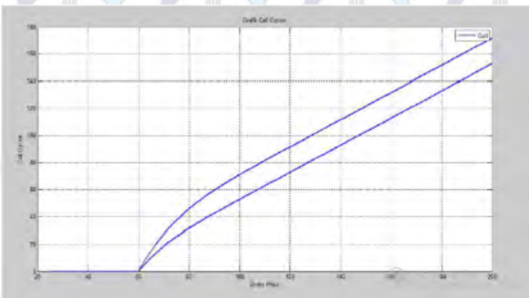
Terlihat dari Tabel 4.1 dan Gambar 4.1, dengan *strike price*, volatilitas (sigma), dan *interest rate* yang telah ditentukan, semakin tinggi *interest rate* maka semakin tinggi pula harga *call option* tanpa menggunakan dividen.

Pengaruh *Strike Price*

Diasumsikan $E_1 = \$30$, $E_2 = \$50$, $\tau = 1$, $r = 6\%$, $\sigma = 0.2$ $\delta = 0$, Bd $= 60$. Dengan harga saham diasumsikan pada tabel berikut dan berdasarkan persamaan (5.1) diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut :

Tabel 4.2: Harga Call Option dengan $E_1 = \$30$ dan $E_2 = \$50$

No.	$S_t(\$)$	$E_1 = \$30$	$E_2 = \$50$
1.	70	27.5028	18.5687
2.	80	45.9369	31.6551
3.	90	59.6280	42.5912
4.	100	71.0494	52.8372
5.	110	81.5356	62.8955
6.	120	91.6869	72.9084



Gambar 4.2: Call option dengan $E_1 = \$30$ dan $E_2 = \$50$

Terlihat dari Tabel 4.2 dan Gambar 4.2, dengan *strike price*, volatilitas (sigma), dan *interest rate* yang telah ditentukan, semakin tinggi *Strike Price* maka semakin rendah harga *call option* tanpa menggunakan dividen.

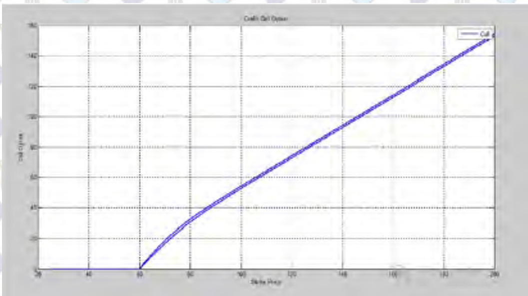
4.1.2 Dengan Pembayaran Dividen

Pengaruh Suku Bunga

Diasumsikan E = \$50, $\tau = 1$, $r_1 = 6\%$, $r_2 = 9\%$, $\sigma = 0.2$ $\delta = 0.05$, Bd = 60. Dengan harga saham diasumsikan pada tabel berikut dan berdasarkan persamaan (5.1) diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut :

Tabel 4.3: Harga Call Option dengan $r_1 = 6\%$ dan $r_2 = 9\%$

No.	S_t(\$)	$r_1 = 6\%$	$r_2 = 9\%$
1.	70	16.8726	18.6988
2.	80	30.6585	32.4704
3.	90	42.2011	43.7838
4.	100	52.7130	54.1706
5.	110	62.8606	64.2719
6.	120	72.8993	74.2963



Gambar 4.3: Call option dengan $r_1 = 6\%$ dan $r_2 = 9\%$

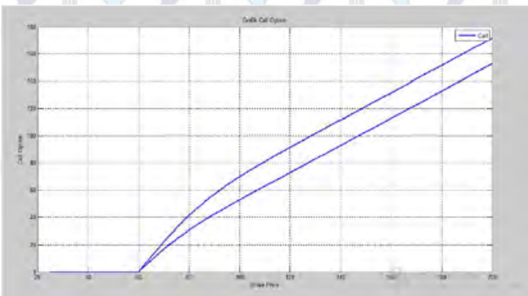
Terlihat dari Tabel 4.3 dan Gambar 4.3, dengan *strike price*, volatilitas (sigma), dan *interest rate* yang telah ditentukan, semakin tinggi *interest rate* maka semakin tinggi pula harga *call option* dengan menggunakan dividen.

Pengaruh *Strike Price*

Diasumsikan $E_1 = \$30$, $E_2 = \$50$, $\tau = 1$, $r = 6\%$, $\sigma = 0.2$ $\delta = 0.05$, Bd $= 60$. Dengan harga saham diasumsikan pada tabel berikut dan berdasarkan persamaan (5.1) diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut :

Tabel 4.4: Harga Call Option dengan $E_1 = \$30$ dan $E_2 = \$50$

No.	$S_t(\$)$	$E_1 = \$30$	$E_2 = \$50$
1.	70	22.1385	16.8726
2.	80	41.3132	30.6585
3.	90	56.9892	42.2011
4.	100	69.8492	52.7130
5.	110	81.0663	62.8606
6.	120	91.5218	72.8993



Gambar 4.4: Call option dengan $E_1 = \$30$ dan $E_2 = \$50$

Terlihat dari tabel 4.4 dan Gambar 4.4, dengan *strike price*, volatilitas (sigma), dan *interest rate* yang telah ditentukan, semakin tinggi *Strike Price* maka semakin rendah harga *call option* dengan menggunakan dividen.

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

a. Diperoleh solusi analitik untuk *down and out call option* dari penyelesaian model persamaan Black-Scholes yang telah ditransformasi Fourier, sebagai berikut:

$$f(S,\tau;E) = \frac{[S.erfc(h_1) - E\exp\{-r\tau\}erfc(h_2)]}{2} - \left(\frac{S}{B}\right)^{-\delta}\frac{\left[B.erfc(h_3) - \left(\frac{S}{B}\right)E\exp\{-r\tau\}erfc(h_4)\right]}{2}. \tag{5.1}$$

b. Berdasarkan simulasi dapat disimpulkan bahwa tingkat kenaikan suku bunga tanpa pembayaran dividen dapat menaikkan nilai *down and out call option*, dan semakin besar strike price maka semakin kecil nilai *down and out call option*. Dengan pembayaran dividen, semakin tinggi tingkat suku bunga maka semakin tinggi pula nilai *down and out call option*, dan semakin besar strike price maka nilai *down and out call option* semakin kecil.

5.2 Saran

Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya, mencari harga down and out call option yang bertipe American option.

LAMPIRAN A
Source Code Down and Out Call Option

$clc; clearall;$

$sigma = input('sigma =');$

$r = input('r =');$

$E = input('E =');$

$delta = input('delta =');$

$tau = input('tau =');$

$Bd = input('Bd =');$

$S = 25 : 1 : 200;$

$n = length(S);$

$fori = 1 : n$

$ifS(i) <= Bd$

$Call(i) = 0;$

$else$

$T = (sigma.^2). * tau;$

$x = log(S(i)./Bd);$

$a = (r - delta - ((sigma.^2)./2))./(sigma.^2);$

$b = Bd./(E. * (exp((-delta). * tau)));$

$d = (2. * (r - delta))./(sigma.^2);$

$y = ((log(b) - x./sqrt(2. * T)) - (((a + 1)./2). * sqrt(2. * T)));$

$h1 = -((log(b) + x./(sqrt(2. * T))) + (((a + 1)./2). * (sqrt(2. * T))));$

$h2 = -((log(b) + x./(sqrt(2. * T))) + ((a/2). * (sqrt(2. * T))));$
$h3 = -((log(b) - x./(sqrt(2. * T))) + (((a + 1)./2). *$
$(sqrt(2. * T))));$
$h4 = -((log(b) - x./(sqrt(2. * T))) + ((a./2). * (sqrt(2. * T))));$
$h1 = real(h1);$
$h2 = real(h2);$
$h3 = real(h3);$
$h4 = real(h4);$
$N1(i) = ((S(i). * erfc(h1)) - (E * exp(-r. * tau). * erfc(h2)))./2;$
$N2(i) = (-((S(i)./Bd)^(- d))). * (((Bd * erfc(h3)) -$
$((S(i)./Bd). * E. * exp(-r * tau). * erfc(h4)))./2);$
$Call(i) = N1(i) + N2(i);$
$payoff(i) = max(S(i) - E, 0);$
$ifCall(i) < 0$
$Call(i) = 0;$
end
end
end
$Call$
$figure(1)$
$plot(S, Call,' LineWidth', 2)$
$holdon$
$gridon$
$xlabel('StrikePrice')$
$ylabel('CallOption')$
$title('GrafikCallOption')$
$legend('Call')$

Keterangan batas dari*Source Code*:

1. E>0
2. B>0
3. B>E
4. Tau>0
5. Delta ≥ 0 dan dalam persentase.
6. R > 0 dan dalam persentase.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Wilmott, P. 1995. **"The Mathematics Of Financial Derivatives"**. Press Syndicate of the University of Cambridge, England.

[2] Epps, T. W., 2007. **"Pricing Derivative Securities"**. 2nd Edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., England.

[3] Willmot, P., 2007. **"Introduces Quantitative Finance"**. 2nd Edition, John Wiley & Son, Ltd, Chichester.

[4] **"http://www.scribd.com/doc/240523365/Modul-Derivatives"** diakses pada 19 Agustus 2015.

[5] Hull, J. C., 2002. **"Option Futures and Other Derivatives"**. 7th Edition, Prentice Hall, New Jersey.

[6] Turner, E., 2010.**"The Black-Scholes Model And Extensions"**.

[7] Tandelilin, E. 2010. **"Portofolio dan Investasi Teori dan Aplikasi"**. 1st Edition, KANISIUS, Yogyakarta, Indonesia.

[8] Wachidah, L. 2009. **"Kecocokan Distribusi Normal Menggunakan Plot Persentil-Persentil yang Distandarisasi"**. Statistika, Vol. 9 No. 1, 41-47.

[9] Reimer, M., Sandmann, K. 1993. **"An Efficient Approach for Down-and-out-Calls in a Binomial Model"**. University of Bonn, Germany.

[10] Carr, P., dkk. 1998. **"Static Hedging of Exotic Options"**. The Journal of Finance, Vol LIII No. 3.

[11] Linetsky, V. 1999. **"Step Options"**. Mathematical Finance, Vol. 9 No. 1.

[12] Carr, P., Chou, A. 2002. **"Hedging Complex Barrier Options"**. New York University, USA.

[13] Andersen, L. B. G., dkk. 2002. **"Static replication of barrier options: some general results"**. Article.

[14] Rohmah, M. N. 2015. **"Kajian Solusi Analitik European Option Menggunakan Metode Transformasi Fourier"**. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Indonesia.

LAMPIRAN B
Biodata Penulis

Penulis bernama Almas Nur Shodrina Putri, lahir di Batang, 23 Maret 1993. Penulis merupakan anak pertama dari pasangan Drs. Sunarjo, S.T dan Tri Susilowati. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Mandala Surabaya (1999-2000), SDN Rangkah 6 Surabaya (2000-2006), SMP Negeri 18 Surabaya (2006-2009), dan SMA Negeri 1 Surabaya (2009-2012). Setelah lulus dari SMA, pada tahun 2012 penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya melalui jalur Undangan dengan NRP 1212 100 020. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Pemodelan dan Simulasi Sistem. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di KM ITS melalui HIMATIKA ITS sebagai staf Depart. Hubungan Luar selama dua periode (2013-2015). Selain itu, penulis juga merupakan bagian dari Panitia Olimpiade Matematika ITS sebagai Penanggung Jawab wilayah Surabaya dan Sie Publikasi dan Dokumentasi.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: almasnur.an@gmail.com